

BESTIMMUNG DER SPEZIFISCHEN LADUNG DES ELEKTRONS (AUSWERTUNG MIT FEHLERRECHNUNG)

TOBIAS FREY, FREYA GNAM, GRUPPE 26, DONNERSTAG

1. $\frac{e}{m}$ -BESTIMMUNG MIT DEM FADENSTRAHLROHR

1.1. Hallspannung für unterschiedliche Spulenströme. Wir bestimmen mit einer Hallsonde das B-Feld innerhalb der Helmholtzspule. Um die Homogenität des Feldes zu prüfen, nehmen wir dafür Messungen an insgesamt zwölf Messpunkten vor (Tabelle 2). Die Messpunkte sind kreuzförmig angeordnet. Die Punkte 1-8 liegen auf einer vertikalen Linie, a-d auf einer waagrechten Linie in der Höhe von Punkt 4. Dieser liegt in der Mitte der Ebene zwischen den beiden Helmholtzspulen. Wir sehen, dass die Magnetfeldstärke an den unterschiedlichen Messpunkten wie erwartet nur wenig schwankt. Die leichten Schwankungen sind darauf zurückzuführen, dass das Magnetfeld nicht perfekt homogen ist.

Damit wir aus den gemessenen Spannungen auf das B-Feld schließen können, muss zunächst die Hallsonde geeicht werden. Außerdem ist von den gemessenen Spannungen der Offset der Hallsonde abzuziehen. Diesen messen wir zu $4,877V$.

1.2. Eichung der Hallsonde. Um die Hallsonde zu eichen, haben wir die Hallspannung in einer langen Spule in Abhängigkeit vom Spulenstrom gemessen (Tabelle 3).

Wir tragen B über der Hallspannung auf (Abbildung 1) und können nun den Eichfaktor a , der der Steigung der Ausgleichsgerade entspricht, ablesen: $a = 0,0311 \frac{T}{V}$

1.3. Mittenfeld zwischen den Helmholtz-Spulen. Wir vergleichen die Magnetfeldstärken, die wir aus den in Aufgabe 1.1 gemessenen Spannungen bestimmt haben, mit den nach $B = 0,7155\mu_0 n \frac{I}{r}$ errechneten Werten. Der Spulenabstand ist gerade so gewählt, dass das Mittenfeld in guter Näherung konstant ist. Daher können wir diese Formel verwenden, um einen Erwartungswert für B in Abhängigkeit vom Spulenstrom zu errechnen.

TABELLE 1. Gemessenes und berechnetes B-Feld

	$I = 1A$	$I = 1,5A$	$I = 2A$
$B[mT]$ (gemessen)	0,68	0,97	1,33
$B[mT]$ (berechnet)	0,78	1,17	1,56
Abweichung [%]	12,5	17,1	14,5

1.4. Messung des Durchmessers der Elektronenkreisbahn im Fadenstrahlrohr. Wir messen die Durchmesser der Elektronenbahnen für eine feste Anodenspannung (Tabelle 4) bzw. einen konstanten Spulenstrom (Tabelle 5).

Es gilt $\frac{e}{m} r^2 = \frac{2U}{B^2} = \frac{2U}{k^2 I_{err}^2}$. Damit ergibt sich

- für konstanten Strom: $r^2 = const \cdot U$ (Abbildung 4)
- für konstante Spannung: $\frac{1}{r^2} = const \cdot I^2$ (Abbildung 3).

Zusammenfassung der Ergebnisse und Berechnung von $\frac{e}{m}$. Aus den gemessenen Werten von R , U und I bestimmen wir nun das Verhältnis von Elektronenladung und Masse:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{R^2 B^2}$$

mit der Näherung $B = 0,7155\mu_0 n \frac{I}{r}$ und $r = \frac{d}{2}$ ergibt sich:

$$\frac{e}{m} = \frac{8R^2 U}{0,7155^2 \mu_0^2 n^2 I^2 d^2}$$

und mit der Steigung $a = 9,581 \cdot 10^{-5} \frac{m^2 A^2}{V}$ die wir aus dem d^2 über $\frac{U}{I^2}$ (Abbildung 1) ablesen:

$$\frac{e}{m} = \frac{8R^2}{0,7155^2 \mu_0^2 n^2 a}$$

Wir erhalten also:

$$\frac{e}{m} = 1,375 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

Dieser Wert weicht um 21,82% ab vom Literaturwert von $1,7588 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$.

Der Fehler liegt wahrscheinlich hauptsächlich an der Ungenauigkeit beim Ablesen des Durchmessers der Kreisbahn.

2. $\frac{e}{m}$ -BESTIMMUNG NACH DER METHODE VON BUSCH

2.1. Vorbereitende Versuche. Wir haben die Kathodenstrahlröhre angeschlossen und uns mit dem Versuchsaufbau vertraut gemacht.

2.2. Spulenstrom für verschiedene Beschleunigungsspannungen. Wir messen den Spulenstrom, bei dem der Elektronenstrahl auf dem Schirm nur als ein Punkt erscheint, in Abhängigkeit von der Spannung für zwei verschiedene Ablenkplatten (Tabelle 6 und Tabelle 7). Die Auswertung der beiden Messreihen erfolgt völlig analog.

Wie in der Vorbereitung erläutert, berechnet sich die spezifische Ladung des Elektrons zu:

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{B^2 d^2}$$

Die Spule ist nicht lang genug um ein homogenes Magnetfeld zu erzeugen. Um das B-Feld zu bestimmen mitteln wir längs der Strecke vom Deflektorzentrum bis zum Leuchtschirm über die Punkte bei $a = 46, 68, 90, 112, 134mm$ und erhalten als grobe Näherung:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2L} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{L-a}{\sqrt{R^2 + (L-a)^2}} \right) \approx 1,7544 \cdot \frac{\mu_0 n I}{2L}$$

Die spezifische Ladung des Elektrons ist proportional zu $\frac{U}{I^2}$:

$$\frac{e}{m} = \frac{32\pi^2 L^2}{1,7544^2 \cdot n^2 \mu_0^2 d^2} \frac{U}{I^2}$$

Wir tragen U über I^2 auf (Abbildung 5) und erhalten für die erste Platte eine Ausgleichsgerade mit der Steigung $a_1 = 63171 \frac{V}{A^2}$ und für die zweite Platte die Steigung $a_2 = 32757 \frac{V}{A^2}$.

$$U = a_{1,2} I^2 \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{32\pi^2 L^2}{1,7544^2 \cdot n^2 \mu_0^2 d^2} \cdot a_{1,2}$$

Damit ergibt sich für die erste Platte mit $a_1 = 63171 \frac{V}{A^2}$ und $d = d_1 - S = 88mm$:

$$\frac{e}{m} = a_1 \cdot \frac{32\pi^2 L^2}{1,7544^2 \cdot n^2 \mu_0^2 d^2} = 1,728 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

Dieser Wert weicht um 1,77% ab vom Literaturwert von $1,7588 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$.

Für die zweite Platte ergibt sich mit $a_2 = 31757 \frac{V}{A^2}$ und $d = d_2 - S = 70mm$:

$$\frac{e}{m} = a_2 \cdot \frac{32\pi^2 L^2}{1,7544^2 \cdot n^2 \mu_0^2 d^2} = 1,416 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

Dieser Wert weicht um 19,5% ab vom Literaturwert von $1,7588 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$. Die große Abweichung bei der zweiten Messung erklärt sich dadurch, dass wir während der Messung den Messbereich des Amperemeters ändern mussten und die letzten Werte nicht mehr so genau ablesen konnten. Würde man für die lineare Regression nur die ersten Werte berücksichtigen, so erhielte man ein besseres Ergebnis.

3. FEHLERRECHNUNG ZUR BESTIMMUNG $\frac{e}{m}$ MIT DEM FADENSTRAHLROHR

3.1. Statistischer Fehler. Die Varianz bei der linearen Regression beträgt:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_y^2}{\Delta_1} N$$

$$\text{mit } \Delta_1 = N \left(\sum_i x_i^2 \right) - \left(\sum_i x_i \right)^2 \text{ und } \sigma_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - y_0 - ax_i)^2.$$

Damit ergibt sich: $\sigma_a = 0,17 \frac{cm^2 A^2}{V}$. Der statistische Fehler der Steigung a pflanzt sich in $\frac{e}{m}$ fort.

$$\Delta \frac{e}{m} = \frac{\Delta a}{a} \frac{e}{m} = 0,177 \cdot 1,375 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = 0,244 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

3.2. Systematischer Fehler. Die Vielfachmessgeräte haben laut Herstellerangaben in den U- und I-Bereichen eine Genauigkeit von $\pm 1\%$: $\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta I}{I} = 0,01$. Für den Ablesefehler gehen wir aus von $\Delta d = 0,004m$, wir teilen durch unseren kleinsten Wert $d_{min} = 0,020m$: $\frac{\Delta d}{d} = 0,2$

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} &= \frac{8R^2}{0,7155^2 \mu_0^2 n^2} \frac{U}{I^2 d^2} \\ \Delta \frac{e}{m} &= \frac{8R^2}{0,7155^2 \mu_0^2 n^2} \left(\left| \frac{1}{d^2 I^2} \right| \Delta U + \left| \frac{-2U}{d^2 I^3} \right| \Delta I + \left| \frac{-2U}{d^3 I^2} \right| \Delta d \right) \\ \Delta \frac{e}{m} &= \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{2\Delta I}{I} + \frac{2\Delta d}{d} \right) \frac{e}{m} \\ \Delta \frac{e}{m} &= 0,23 \cdot 1,375 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \\ \Delta \frac{e}{m} &= 0,316 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \end{aligned}$$

3.3. Ergebnisse unter Berücksichtigung des Fehlers.

$$\frac{e}{m} = (1,375 \pm 0,244 \pm 0,316) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = (1,375 \pm 0,6) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

4. FEHLERRECHNUNG ZUR BESTIMMUNG $\frac{e}{m}$ NACH BUSCH

4.1. **Statistischer Fehler.** Wir verwenden wie oben:

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_y^2}{\Delta} N$$

$$\sigma_{a_1} = 1769 \frac{V}{A^2}, \sigma_{a_2} = 1402 \frac{V}{A^2}$$

Der statistische Fehler der Steigung a pflanzt sich in $\frac{e}{m}$ fort.

$$\Delta \frac{e}{m} = \frac{\Delta a_{1,2}}{a_{1,2}} \frac{e}{m}$$

Platte 1.

$$\Delta \frac{e}{m} = \frac{1769 \frac{V}{A^2}}{63171 \frac{V}{A^2}} \cdot 1,728 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = 0,048 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

Platte 2.

$$\Delta \frac{e}{m} = \frac{1402 \frac{V}{A^2}}{31575 \frac{V}{A^2}} \cdot 1,416 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = 0,063 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

4.2. **Systematischer Fehler.** Die Vielfachmessgeräte haben laut Herstellerangaben in den U- und I-Bereichen eine Genauigkeit von $\pm 1\%$:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta I}{I} = 0,01$$

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} &= \frac{32\pi^2 L^2}{1,7544^2 \cdot n^2 \mu_0^2 d^2} \frac{U}{I^2} \\ \Delta \frac{e}{m} &= \frac{32\pi^2 L^2}{1,7544^2 \cdot n^2 \mu_0^2 d^2} \left(\left| \frac{1}{I^2} \right| \Delta U + \left| \frac{-2U}{I^3} \right| \Delta I \right) \\ \Delta \frac{e}{m} &= \left(\frac{\Delta U}{U} + \frac{2\Delta I}{I} \right) \frac{e}{m} \\ \Delta \frac{e}{m} &= 0,03 \frac{e}{m} \end{aligned}$$

Platte 1.

$$\Delta \frac{e}{m} = 0,03 \cdot 1,728 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = 0,052 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

Platte 2.

$$\Delta \frac{e}{m} = 0,03 \cdot 1,416 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = 0,043 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

4.3. Ergebnisse unter Berücksichtigung des Fehlers.

Platte 1. $\frac{e}{m} = (1,728 \pm 0,048 \pm 0,052) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = (1,728 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$

Platte 2. $\frac{e}{m} = (1,416 \pm 0,063 \pm 0,043) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} = (1,416 \pm 0,1) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$

5. ANHANG: MESSERGEBNISSE UND DIAGRAMME

TABELLE 2. 1.1 Hallspannung für unterschiedliche Spulenströme

Stelle	$U_H[V]$ für $I = 1,0A$	$U_H[V]$ für $I = 1,5A$	$U_H[V]$ für $I = 2,0A$
1	4,854	4,845	4,833
2	4,854	4,843	4,833
3	4,855	4,844	4,833
4	4,855	4,844	4,833
5	4,856	4,846	4,835
6	4,856	4,847	4,832
7	4,854	4,848	4,837
8	4,855	4,855	4,844
a	4,855	4,844	4,830
b	4,856	4,846	4,833
c	4,856	4,844	4,833
d	4,855	4,844	4,834

TABELLE 3. 1.2 Hallspannung in Abhängigkeit vom Spulenstrom in Feld der Eichspule

$U_H[V]$	$I[A]$	$B[mT]$ (berechnet)
4,984	1,04	3,431
4,990	1,10	3,629
5,000	1,20	3,958
5,010	1,30	4,288
5,021	1,41	4,651
5,030	1,50	4,948
5,041	1,60	5,278
5,050	1,69	5,575
5,055	1,71	5,641
5,065	1,79	5,905

TABELLE 4. 1.4 Durchmesser in Abhängigkeit von der Anodenspannung

$U[V]$	$d(cm)$ für $I = 1A$	$d(cm)$ für $I = 2A$
100	7,0	4,0
125	9,0	4,4
150	10,3	4,6
175	10,9	5,9
200	12,2	6,2
225	13,7	6,4
250	14,0	6,7

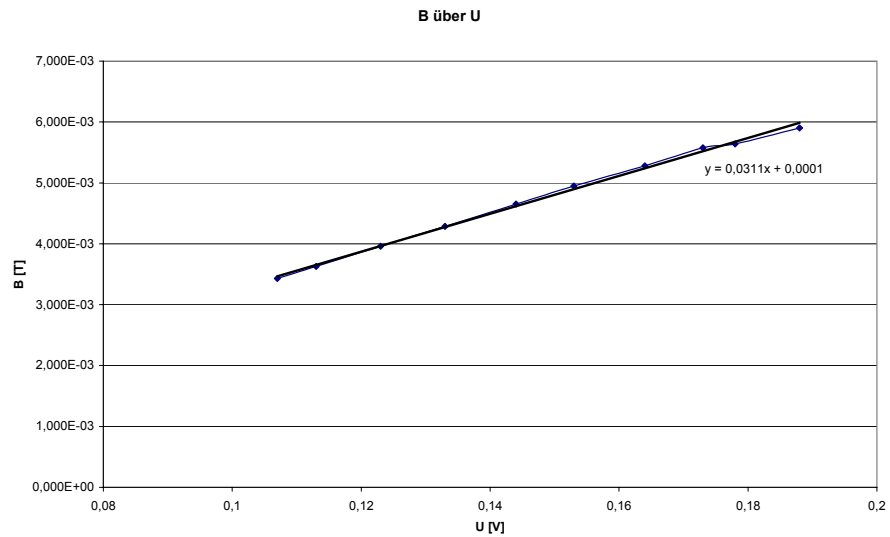


ABBILDUNG 1. 1.2 B über U

TABELLE 5. 1.4 Durchmesser in Abhängigkeit vom Spulenstrom

$I[A]$	$d(cm)$ für $U = 125V$	$d(cm)$ für $U = 250V$
1	9,5	15,2
1,2	8,1	11,8
1,4	7	9,6
1,6	6,3	8,8
1,8	5,6	7,8
2	5,4	7,1

TABELLE 6. 2.2 Spulenstrom in Abhängigkeit von der Spannung für die 1. Ablenkplatte

$U[V]$	$I [mA]$
500,3	82
524,9	85
550,0	86
574,9	89
600,4	91
624,4	93
650,3	95
675,3	97
700,4	100

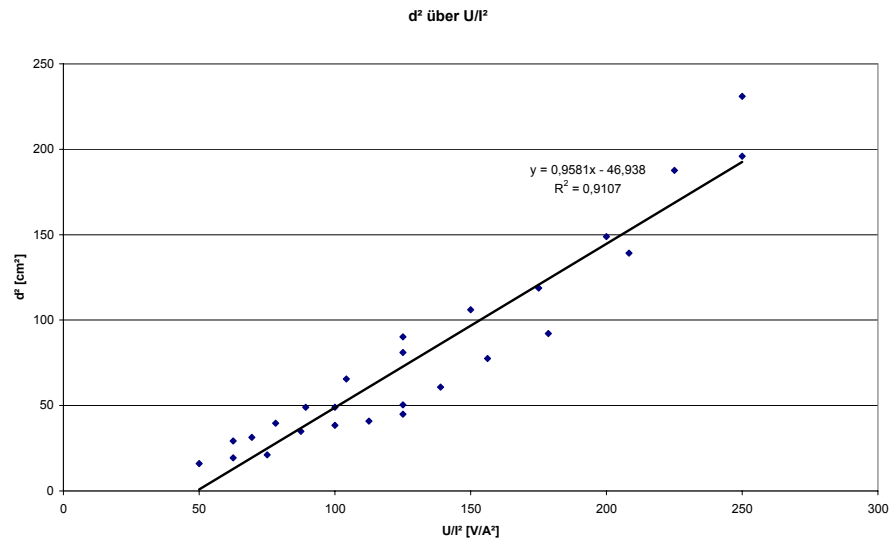


ABBILDUNG 2. 1.4 d^2 über $\frac{U}{I^2}$

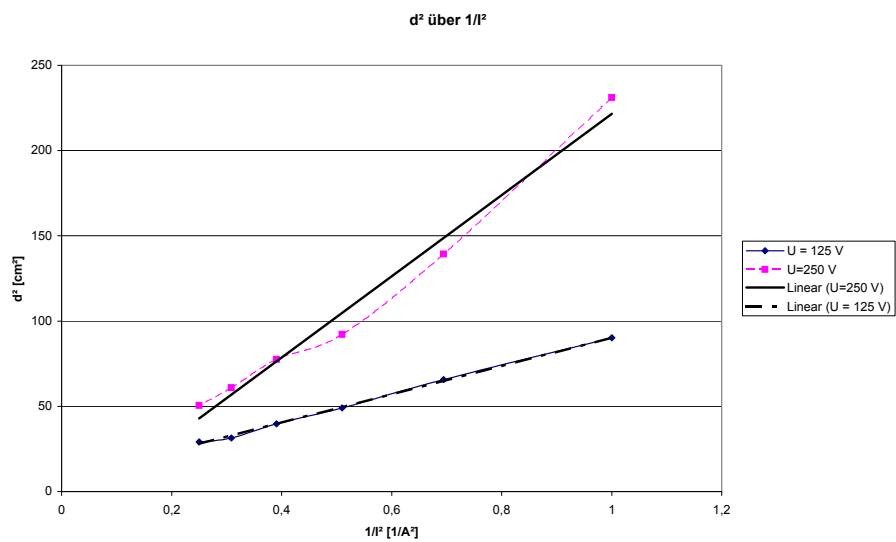


ABBILDUNG 3. 1.4 d^2 über $\frac{1}{I^2}$

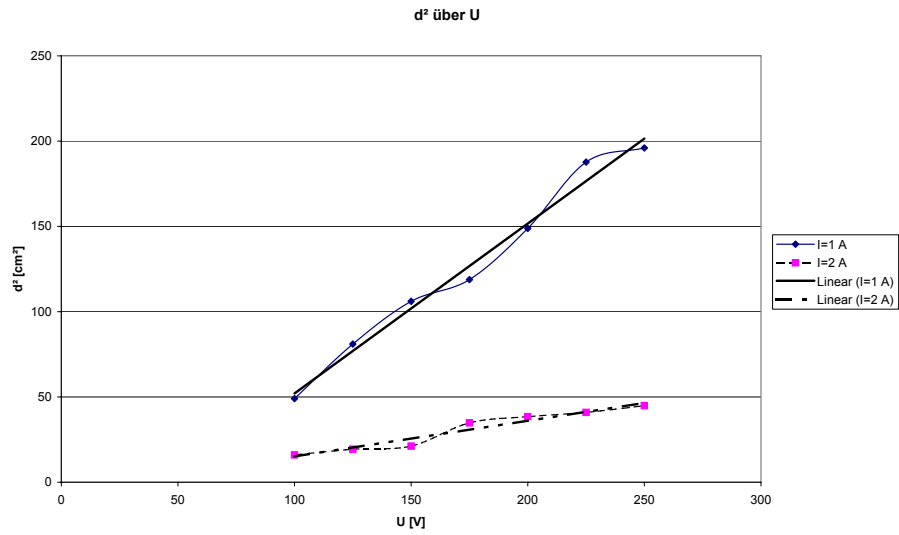


ABBILDUNG 4. $1.4\ d^2$ über U

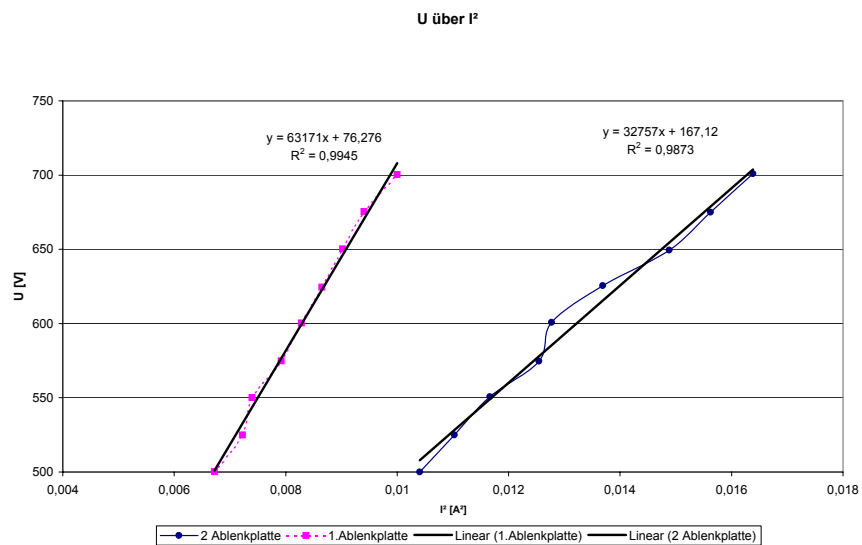


ABBILDUNG 5. U über I^2

TABELLE 7. 2.2 Spulenstrom in Abhängigkeit von der Spannung für die
2. Ablenkplatte

$U[V]$	$I [mA]$
499,9	102
525,0	105
550,6	108
574,7	112
600,8	113
625,5	117
649,5	122
674,9	125
700,9	128