VORBEREITUNG: GALVANOMETER

FREYA GNAM, GRUPPE 26, DONNERSTAG

SCHWINGVERHALTEN DES GALVANOMETERS

Das Galvanometern ist ein sensibles Messgerät mit dem auch kleine Ströme und Spannungen gemessen werden können. Es besteht aus einer Drehspule, die sich im Magnetfeld eines Permanentmagneten befindet. Fließt ein Strom durch die Drehspule so wirkt ein Drehmomemt. Durch Spiralfedern wird ein rücktreibendes mechanisches Drehmoment erzeugt. Dieses bewirkt, dass die Drehspule nachdem sie ausgelenkt wurde allmählich wieder in ihre Ausgangslage zurückkehrt. Dabei führt die Spule eine gedämpfte Schwingung aus. Die Auslenkung ist proportional zum fließenden Strom. Sie kann mit einem Lichtstrahl mithilfe eines Spiegels auf einer Messskala sichtbar gemacht werden.

Freie ungedämpfte Schwingung. Die Bewegungsgleichung für harmonische Drehschwingungen ohne Dämpfung lautet:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\varphi(t) = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \psi)$$

Amplitude φ_0 und Phase ψ werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Freie gedämpfte Schwingungen. Die Federn erzeugen bei einer Auslenkung der Drehspule um den Winkel φ ein rücktreibendes Drehmoment. Das Angreifen des Drehmoments bedeutet eine Drehbeschleunigung:

$$\Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M$$

Die Torsion erwirkt ein Gegendrehmoment der Größe:

$$M_T = -D\varphi$$

Die Luftreibung tritt nur bei Bewegung auf, und ist demnach von $\dot{\varphi}$ abhängig:

$$M_R = -\rho\dot{\varphi}$$

Die Selbstinduktion ergibt ein resultierendes Drehmoment von

$$M_I = -\frac{G^2\dot{\varphi}}{R + R_i}$$

wobei R der Vorwiderstand und R_i der Innenwiderstand des Galvanometers sind.

Das Gesamtdrehmoment ist definiert als $M = GI$ wobei G die s.g. *Galvanometerkonstante* ist und I der Strom durch die Spule.

Setzt man alle Gegendrehmomente in die Bewegungsgleichung ein so erhält man:

$$\Theta\ddot{\varphi} + (\rho + \frac{G^2}{R + R_i})\dot{\varphi} + D\varphi = GI$$

Diese Gleichung nennt man *Galvanometergleichung*. Um diese Gleichung zu lösen, löst man zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \left(\rho + \frac{G^2}{R_i + R_a}\right)\dot{\varphi} + D\varphi = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{1}{\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_i + R_a}\right)\dot{\varphi} + \frac{D}{\Theta}\varphi = 0$$

Mit $\omega_0^2 := \frac{D}{\Theta}$ und $2\beta := \frac{1}{\Theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_i+R}\right)$ vereinfacht sich das zu:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Mit dem Ansatz $\varphi(t) = ce^{-\lambda t}$ erhält man $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Definiere zudem $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Unterscheide nach Stärke der Dämpfung:

Schwingfall. Schwachen Dämpfung: $\omega_0 > \beta$, ω reell.

Es ergibt sich eine gedämpfte periodische Bewegung. Für den Schwingfall lautet die allgemeine Lösung:

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t); A, B \in \mathbb{R}$$

Kriechfall. $\omega_0 < \beta$ überdämpft.

Man erhält:

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})$$

Die Schwingung Konvergiert schnell.

Aperiodischer Grenzfall. $\omega_0 = \beta$ Das System kehrt nach einem Ausschlag in seine Ruhelage zurück. Die allgemeine Lösung ist :

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}(A + Bt)$$

1. Vorexperimente

(1) Durch elektrostatische Aufladung fließt ein kleiner Strom durch den Körper. Also ist ein Ausschlag des Galvanometers zu erwarten.
(2) Im Metall wir durch das Regeln Energie in Form von Reibungswärme freigesetzt. Dabei können sich Elektronen lösen. Diese bewirken einen Strom, der vom Galvanometer angezeigt wird.
(3) Wenn das Galvanometer nicht angeschlossen ist, zeigt es keinen Ausschlag. Wird ein Widerstand angelegt, so ist eventuell mit einem leichten Ausschlag zu rechnen.

2.1. Der Galvanometerausschlag α wird in Abhängigkeit vom Vorwiderstand R gemessen. Trägt man den Kehrwert des Ausschlags $\frac{1}{\alpha}$ über dem Vorwiderstand R auf, so lassen sich mithilfe der Ausgleichsgeraden Innenwiderstand R_G und Stromempfindlichkeit C_I bestimmen.

Im statischen Fall ist $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$ und damit

$$M = D\hat{\varphi} = GI$$

Der Ausschlag $\alpha = 2r\varphi$ ist der Stromstärke proportional: $\alpha = C_I I$

Da $R_3 >> R_4$ gilt: $I_{ges} \approx \frac{U_0}{R_3}$

Damit ist der Strom durch das Galvanometer:

$$I = U_0 \frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_4 + R_5 + R_G}$$

Damit ist:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{C_I I} = \frac{R_3}{C_I U_0 R_4}(R_4 + R_5 + R_G) = \frac{R_3}{C_I U_0 R_4} R_5 + \frac{R_3(R_G + R_4)}{C_I U_0 R_4}$$

C_I lässt sich aus der Steigung m bestimmen:

$$m = \frac{R_3}{C_I U_0 R_4} \Rightarrow C_I = \frac{R_3}{m U_0 R_4}$$

Für $R_5 = 0$ verschwindet der Steigungsterm. Nun lässt sich der Innenwiderstand des Galvanometers R_G bestimmen:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{R_3}{2 C_I U_0 R_4}(R_4 + R_G) \Rightarrow R_G = \frac{C_I U_0 R_4}{\alpha R_3} - R_4$$

2.2. Hier soll wieder der Innenwiderstand des Galvanometers R_G bestimmt werden. Die Schaltung wird nach Abbildung 3 auf dem Aufgabenblatt aufgebaut. Wieder wird der Galvanometerausschlag α in Abhängigkeit vom Vorwiderstand R gemessen. Wie in Aufgabe 2.1. wird dann der Innenwiderstand des Galvanometers mithilfe der Auftragung von $\frac{1}{\alpha}$ über R bestimmt.

Wir verwenden analog zu Aufgabe 2.1. die Näherung $I_{ges} \approx \frac{U_0}{R_1 1}$.

Offene Brücke. Galvanometerstrom:

$$I = \frac{U_0(R_{12} + R_{13})}{R_{11}(R_G + R_{12} + R_{13} + R_{14})}$$

Damit:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{C_I I} = \frac{R_{11}(R_G + R_{12} + R_{13} + R_{14})}{C_I U_0 (R_{12} + R_{13})} = \frac{R_{11}}{C_I U_0 (R_{12} + R_{13})} R_1 4 + \frac{R_{11}(R_G + R_{12} + R_{13})}{C_I U_0 (R_{12} + R_{13})}$$

Aus der Gleichung der Ausgleichsgeraden lässt sich C_I bestimmen:

$$C_I = \frac{R_{11}}{m U_0 (R_{12} + R_{13})}$$

Geschlossene Brücke. Der Widerstand des Potentiometers ist nun sehr klein gegen den Vorwiderstand und kann vernachlässigt werden.

Galvanometerstrom:

$$I = U_0 \frac{R_{12}}{R_{11}(R_G + R_{12})}$$

Damit:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{R_{11}(R_G + R_{12})}{C_I U_0 R_{12}}$$

Für $\frac{1}{\alpha}$ ergibt sich eine Konstante. Die Auftragung von $\frac{1}{\alpha}$ über R ergibt also eine horizontale Gerade. Der Galvanometerausschlag ist unabhängig vom Widerstand.

Für den Innenwiderstand des Galvanometers ergibt sich nach Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen:

$$R_G = \frac{R_{12} R_{14}}{R_{13}}$$

R_G ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Geraden, weil die Schaltung ähnlich der Wheatstone'schen Brücke aufgebaut ist: Im Schnittpunkt fließt kein Strom durch die Brücke.

2.3. Hier wird der Galvanometerausschlag α in Abhängigkeit von der Spannung U gemessen. Die Schaltung wird nach Abbildung 4 auf dem Aufgabenblatt aufgebaut.

Für den Strom ergibt sich näherungsweise $I_{ges} \approx \frac{U_0}{R_{15}}$

Damit ergibt sich:

$$\alpha = C_I I = C_I \frac{U_0}{R_{15}}$$

Der Innenwiderstand des Galvanometers R_G kann nicht mit einem gewöhnlichen Ohmmeter gemessen werden, da der Prüfstrom des Ohmmeters so hoch ist, dass er das sensible Galvanometer beschädigen könnte. Schaltet man einen Widerstand parallel, so bewirkt dieser eine Dämpfung des Galvanometers. Die statische Spannungsempfindlichkeit berechnet sich zu $C_U = \frac{C_I}{R_G}$.

Sobald der Strom ausgeschaltet wird, nimmt die Lorentzkraft ab und die Spule im Kern des Galvanometers schwingt zurück.

Das Dämpfungsverhältnis lässt sich über die Ausschläge α_i berechnen: $k = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$

Aus dem Dämpfungsverhältnis k und der direkt gemessenen Periodendauer T erhält man die Abklingkonstante $\beta_{R_a} = \frac{\ln k}{T}$.

Nun wird $(\beta_{R_a} - \beta_\infty)^{-1}$ über R_a aufgetragen und die Ausgleichsgerade bestimmt. $(\beta_{R_a} - \beta_\infty)^{-1} = \frac{2\Theta}{G^2}(R_a + R_G)$.

Die Frequenz des ungedämpften Galvanometers beträgt:

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_\infty}\right)^2 + \beta_\infty}$$

Wir verwenden $m = \frac{2\Theta}{G^2}$, $\omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}$, $C_I^{'} = \frac{G}{D}$ und berechnen damit G, Θ und D:

$$G = \frac{2}{mC_I^{'}\omega_0^2}, \Theta = \frac{2}{mC_I^{'2}\omega_0^4}, D = \frac{2}{mC_I^{'2}\omega_0^2}$$

Dabei ist $C_I^{'} = \frac{\varphi_{Spiegel}}{I}$. Mit Abstand r zwischen Spiegel und Messholz gilt $a = 2\varphi_{Spiegel}r$. Somit gilt:

$$C_I^{'} = \frac{C_I}{2r}$$

4

Die Schaltung wird nach Abbildung 5 auf dem Aufgabenblatt aufgebaut.

In dieser Aufgabe soll die Wirkung von kürzeren Stromstößen untersucht werden. Diese werden durch Kondensatorentladungen erzeugt:

$$\int I dt = Q = CU$$

Da der Stromverlauf exponetiell ist, wird eine vollständige Entladung erst bei $t \to \infty$ erreicht. Deshalb kann die Stromstoßdauer T_a nicht genau angegeben werden. Nach $T_a = 3RC$ ist etwa 95% der Ladung angeflossen.

Bei Messungen mit Dämpfungskonstanten größer als β_∞ müssen Widerstände parallel zum Galvanometer geschaltet werden. Dann ist $Q_G < CU$.

Experimentell bestimmt man bei kurzer Stoßdauer T_a (d.h. R klein) die ballistische Stoßempfindlichkeit durch

$$C_b^{'} = \frac{\varphi}{Q_G}$$

Die experimentell bestimmten Werte sollen mit den theoretisch berechneten verglichen werden. Rechnerisch ergibt sich:

$$C_b^{'} = \frac{G}{\Theta\omega_0}$$

Die fluxmetrische Empfindlichkeit im Kriechfall beträgt:

$$C_b^{'} = \frac{R_G + R_a}{G}$$

Mit ballistischen Messungen kann man Elektrizitätsmengen messen, die als kurz dauernder Stromstoß durch die Spule des Galvanometers entladen werden. Das Prinzip ist ähnlich, wie beim Schuss in einen Pendel-Sandsack, wo der Impuls bestimmt wird, der sich als Produkt von Masse und Geschwindigkeit ergibt.