

GEOMETRISCHE OPTIK (AUSWERTUNG MIT FEHLERRECHNUNG)

TOBIAS FREY, FREYA GNAM, GRUPPE 26, DONNERSTAG

1. BRENNWEITEN BESTIMMUNG

1.1. Brennweite einer dünnen Sammellinse. Wir verwenden eine Linse, für die eine Brennweite von $f = 8\text{cm}$ angegeben ist. Zur Messung der Brennweite wird der Schirm so aufgestellt, dass man einen möglichst scharfen und hellen Lichtfleck erhält. Den Abstand von der Linse zum Schirm sollte dann der Brennweite der Linse entsprechen. Wir führen fünf Messungen durch und erhalten eine mittlere Brennweite von $\bar{f} = 8,2\text{cm}$. Damit ergibt sich eine Abweichung vom tatsächlichen Wert von 2,5%.

Statistischer Fehler.

$$\sigma_{\bar{f}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2} = 0,055\text{cm}$$

Unter Berücksichtigung des statistischen Fehlers ergibt sich eine gemessene Brennweite von:

$$f = 8,2\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$$

Der tatsächliche Wert liegt somit nicht innerhalb unseres Fehlerintervalls. Allerdings haben wir den systematischen Fehler noch nicht berücksichtigt. Wir gehen von einer Ableseun-
genauigkeit von $0,2\text{cm}$ aus und erhalten:

$$f = 8,2\text{cm} \pm 0,3\text{cm}$$

Weitere systematische Fehlerquellen.

- Näherung: Parallel einfallendes Lichtbündel
- Linsenfehler
- Abberation
- Unebenheiten der Schirmoberfläche

1.2. Besselsches Verfahren. Die Linse erzeugt an den Punkten a und a' ein scharfes Bild. Wir führen Messreihen mit jeweils fünf Messungen durch, um diese Punkte experimentell zu bestimmen. Mit $\bar{d} = \bar{a} - \bar{a}'$ und dem einmal gemessenen Abstand $e = 50\text{cm}$ der Blende zum Schirm lässt sich \bar{f} jeweils berechnen:

$$\bar{f} = \frac{e^2 - \bar{d}^2}{4e}$$

Statistischen Fehler. Den statistischen Fehler haben wir berechnet, indem wir zunächst den Fehler der Messung der beiden Linsenpositionen und daraus den ihres Abstandes berechnet haben. Dieser Fehler pflanzt sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung fort:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\bar{a}} &= \frac{\sigma_a}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i^n (a_i - \bar{a})^2} \\
 \sigma_{\bar{d}} &= \sqrt{\sigma_{\bar{a}}^2 + \sigma_{\bar{a}'}^2} \\
 \sigma_{\bar{f}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial d}\right) \cdot \sigma_{\bar{d}}^2} \\
 &= \sqrt{\frac{\bar{d}^2}{4e^2} \cdot \sigma_{\bar{d}}^2}
 \end{aligned}$$

TABELLE 1. Brennweitenbestimmung nach Bessel mit statistischem Fehler

	$\bar{d}[cm]$	$\sigma_{\bar{d}}[cm]$	$\bar{f}[cm]$	$\sigma_{\bar{f}}[cm]$
blaues Licht innen	28,74	0,176	8,37	0,051
rotes Licht innen	28,54	0,129	8,43	0,037
blaues Licht außen	30,58	0,065	7,82	0,020
rotes Licht außen	30,26	0,082	7,92	0,025

Systematische Fehler. Die Ungenauigkeit beim Ablesen der Linsenpositionen stellt eine systematische Fehlerquelle dar. Wir nehmen an, dass wir die Linsenpositionen a und a' jeweils auf einen halben Millimeter genau ablesen konnten und erhalten damit den Fehler $\Delta d = 1mm$. Wir nehmen an, dass wir auch den Abstand e auf einen halben Millimeter genau ablesen haben: $\Delta e = 0,5mm$.

Größtfehlerabschätzung:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right| \Delta e = \frac{d}{2e} \Delta d + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{d^2}{e^2} \right) \Delta e$$

Ergebnis unter Berücksichtigung des Fehlers. Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \text{blaues Licht innen} \quad f &= 8,37cm \pm 0,051cm \pm 0,316cm = 8,37cm \pm 0,4cm \\
 \text{rotes Licht innen} \quad f &= 8,43cm \pm 0,037cm \pm 0,315cm = 8,43cm \pm 0,4cm \\
 \text{blaues Licht außen} \quad f &= 7,82cm \pm 0,020cm \pm 0,321cm = 7,82cm \pm 0,3cm \\
 \text{rotes Licht außen} \quad f &= 7,92cm \pm 0,025cm \pm 0,320cm = 7,92cm \pm 0,3cm
 \end{aligned}$$

Für rotes Licht erhalten wir aufgrund der chromatischen Aberration größere Brennweiten als für blaues Licht. Zudem sieht man an unseren Messergebnissen, dass der Brennpunkt der Linse für die äußeren Linsengebiete zur Linse hin verschoben wurde, was eine Folge der sphärischen Aberration ist. Die auf der Linse angegebene Brennweite von $f = 8cm$ befindet sich zwischen den von uns für das äußere und das innere Linsengebiet gemessenen Werten.

1.3. Abbésches Verfahren.

Brennweite des Zweilinsensystems. Hier haben wir für ein Zweilinsensystem die Brennweite des Systems ermittelt und daraus auf die Brennweiten der einzelnen Linsen geschlossen. Wir haben dazu bei den Abständen $d_1 = 5, 15$, $d_2 = 7, 15$ und $d_3 = 9, 15$ jeweils für sechs “Gegenstand-Marke-Abstände” Messungen der Vergrößerungen durchgeführt.

Wir stellen die reziproke Vergrößerung über der Entfernung der Marke des Systems vom Gegenstand dar:

$$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{x - l}{f}$$

mit Abstand x des Gegenstandes zum Messpunkt und Abstand l dieses Messpunktes zur Hauptebene.

Über eine Ausgleichsgerade der Form $y = mx + c$ (Abbildungen 1, 2, 3) lässt sich die Brennweite f berechnen:

$$f = \frac{1}{m}$$

Statistischer Fehler. Die Varianz bei der linearen Regression beträgt:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_y^2}{\Delta} N$$

mit $\Delta = N \left(\sum_i x_i^2 \right) - \left(\sum_i x_i \right)^2$ und $\sigma_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - y_0 - mx_i)^2$.

Der statistische Fehler der Steigung m pflanzt sich in f fort:

$$\sigma_{\bar{f}} = \frac{\sigma_{\bar{m}}}{m} f$$

TABELLE 2. Brennweiten des Systems und statistischer Fehler

$d[cm]$	$f[cm]$	$\sigma_{\bar{f}}[cm]$
5,15	7,057	0,30
7,15	7,874	0,22
9,15	8,688	0,26

Brennweiten der Einzellinsen. Ausgehend von der Ausgleichsgerade in Abbildung 4 berechnen sich die Brennweiten der beiden Einzellinsen zu:

$$f_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} + \frac{1}{m}}$$

Statistischer Fehler der Einzelbrennweiten:

$$\sigma_{\bar{f}_{1,2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_{1,2}}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial f_{1,2}}{\partial m} \right)^2 \sigma_m^2}$$

mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{1,2}}{\partial c} &= -\frac{1}{2m} \pm \frac{c}{4m^2} \left(\frac{c^2}{4m} + \frac{1}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{\partial f_{1,2}}{\partial m} &= \frac{c}{2m^2} \mp \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{2m^3} + \frac{1}{m^2} \right) \left(\frac{c^2}{4m} + \frac{1}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
\sigma_{\bar{c}}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{N\Delta} \sum_i x_i^2 \\
\sigma_{\bar{m}}^2 &= \frac{\sigma_y^2}{\Delta}
\end{aligned}$$

TABELLE 3. Brennweiten und statistische Fehler der Einzellinsen

$$\begin{aligned}
f_1 &= 8,38\text{cm} \pm 1,5\text{cm} \\
f_2 &= 17,82\text{cm} \pm 2,6\text{cm}
\end{aligned}$$

2. AUFBAU OPTISCHER INSTRUMENTE

2.1. Fernrohr.

Keplersches Fernrohr. Wir verwenden zwei bikonvexe Linsen mit den Brennweiten $f_1 = 30\text{cm}$ und $f_2 = 5\text{cm}$ und ordnen sie im Abstand $d = f_1 + f_2 = 35\text{cm}$ an. Damit ergibt sich rechnerisch eine Vergrößerung von

$$\gamma = \frac{f_1}{f_2} = 6$$

Diese Vergrößerung ist schwer zu überprüfen, da uns kein Vergleichsobjekt zur Verfügung stand. Erwartungsgemäß ergibt sich ein um 180° gedrehtes Bild, es ist also seitenverkehrt und auf dem Kopf stehend.

Galileisches Fernrohr. Für das galileische Fernrohr verwenden wir eine bikonvexe Linse mit Brennweite $f_1 = 30\text{cm}$ und eine bikonkave Linse mit Brennweite $f_2 = -50\text{cm}$ die im Abstand $d = f_1 + f_2 = 20\text{cm}$ angeordnet sind. Wir erhalten ein aufrechtes Bild, die errechnete Vergrößerung γ ist genauso groß wie beim Keplerschen Fernrohr.

2.2. Projektionsapparat für Diapositive. Die Brennweite der Linse, die uns zur Verfügung stand, unterschied sich von der in der Vorbereitung angegebenen. Sie betrug $f = 8\text{cm}$. Weiterhin soll die Vergrößerung $\gamma = \frac{b}{a} = 10$ betragen. Damit ergibt sich: $a = 8,8\text{cm}$ und $b = 88\text{cm}$.

Wir erhalten die Vergrößerung $\gamma = 10$ für $a = 8,8\text{cm}$ und $b = 87,7$.

2.3. Mikroskop. Das zu betrachtende Dia wird vor eine Lichtquelle gesetzt, gleich dahinter positionieren wir das Objektiv, eine Linse mit der Brennweite $f_1 = 5\text{cm}$. In etwas größerem Abstand bringen wir die Okularlinse mit $f_2 = 8\text{cm}$ an. Für die Scharfstellung des Bildes ist nur der Abstand zwischen Dia und Objektiv ausschlaggebend. Über den Abstand von Objektiv und Okular lässt sich die Vergrößerung regulieren.

3. ABBILDUNGEN

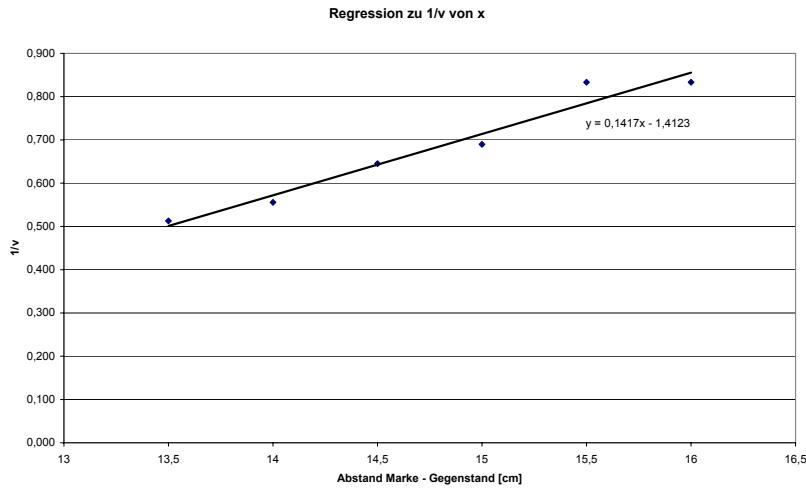


ABBILDUNG 1. Abstand Marke – Gegenstand für $d = 5,15\text{cm}$

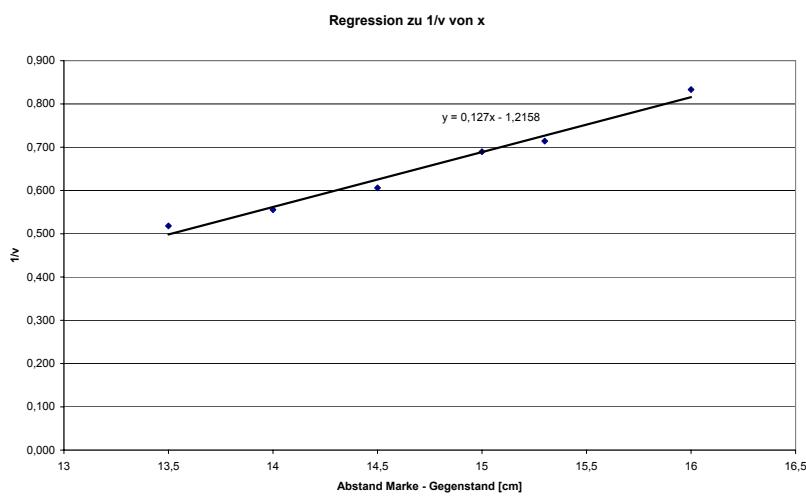


ABBILDUNG 2. Abstand Marke – Gegenstand für $d = 7,15\text{cm}$

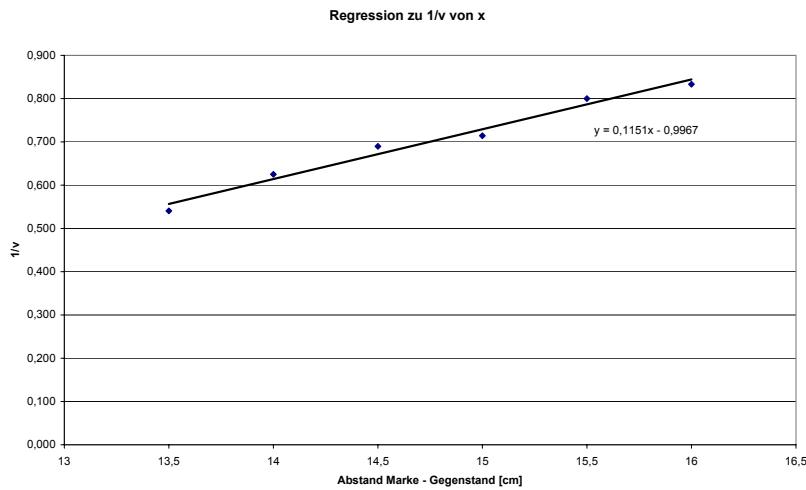


ABBILDUNG 3. Abstand Marke – Gegenstand für $d = 9, 15\text{cm}$

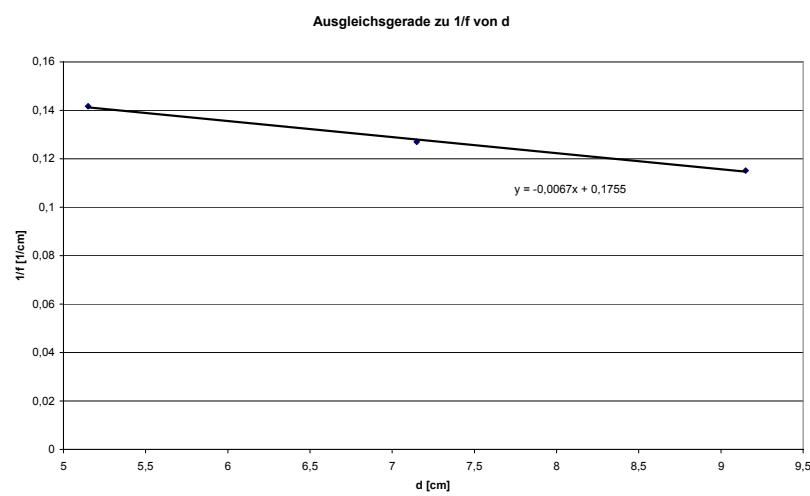


ABBILDUNG 4. Ausgleichsgerade