VORBEREITUNG: SCHWINGUNGEN, RESONANZVERHALTEN

FREYA GNAM, GRUPPE 26, DONNERSTAG

VERSUCHSAUFBAU

Im Versuch sollen freie, gedämpfte und erzwungene Drehschwingungen an einem harmonischen Oszillator (Drehpendel nach Pohl) untersucht werden. Dazu steht das Computer-Messwerterfasssystem CASSY zur Verfügung.

Das Drehpendel. Das Pohlsche Rad ist ein Drehpendel. In dem Versuch handelte es sich um eine Kupferscheibe mit homogener Massenverteilung und einer an ihr befestigten Spiralfeder, die so angeordnet ist, daß sie der Drehbewegung durch den Schwerpunkt entgegen wirkt. Die Lage kann durch einen Metallzeiger optisch abgelesen werden.

An der Achse des Drehpendels ist ein leichtgängiges Potentiometer angebracht. Damit wird eine zur Auslenkung proportionalen Spannung erzeugt, die über den Analogeingang des CASSY-Interface als Spannung registriert wird.

Mit einem Elektromagneten, der wie eine Wirbelstrombremse[1] wirkt, wird eine zu $\frac{d\varphi}{dt}$ proportionale Dämpfung erzeugt. Je nach Strom durch den Magneten können unterschiedliche Dämpfungen β eingestellt werden.

Das Drehpendel kann durch einen Motor angetrieben werden, dessen Anregungsfrequenz variabel ist. Beim Einschalten treten dabei Einschwingvorgänge auf, die mit der Zeit abklingen. Erst dann sollten Messungen durchgeführt werden.

Der elektomagnetische Schwingkreis. Ein elektromagnetischer Schwingkreis ist eine Schaltung aus Kondensator C und Induktivität L, in der der Kondensator periodisch aufgeladen und entladen wird. Der Kondensator C, in dem die elektrische Energie $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$ gespeichert ist, entlädt sich über die Spule L. Der dabei fließende Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ erzeugt in der Spule ein Magnetfeld B mit der magnetischen Energie $W_m = \frac{1}{2}LI^2$. Wenn der Strom abzunehmen beginnt, entsteht in der Spule eine Induktionsspannung, welche die Abnahme von I hemmt. Der Kondensator wird umgekehrt aufgeladen und beginnt dann sich wieder zu entladen...

[1]Prinzip einer Wirbelstrombremse: Bewegt sich eine Metallplatte in einem Magnetfeld, werden in ihr Wirbelströme induziert. Die Ströme erzeugen selbst wieder ein Magnetfeld, das dem äußeren entgegengesetzt ist. Der elektrische Widerstand der Metallplatte bildet für die Wirbelströme einen ohmschen Verbraucher, wodurch die Bewegungsenergie in Wärme umgesetzt wird.

1. Drehpendel, freie Schwingungen

Die Feder erzeugt bei einer Auslenkung des Rings um den Winkel φ ein rücktreibendes Drehmoment $M_f = \Omega\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D^*\varphi$.

Freie, ungedämpfte Schwingung. Die Bewegungsgleichung für harmonische Drehschwingungen ohne Dämpfung lautet:

$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\varphi(t) = 0$, wobei $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Omega}$.

Trägheitsmoment des Drehpendels, einfach abgeschätzt:

$\Omega = mr^2$ mit $m = \rho V = \rho\pi h(r_a^2 - r_i^2)$.

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist: $\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_0 t + \psi)$. Amplitude φ_0 und Phase ψ werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Der Schwingungsvorgang ist auch ohne Wirbelstrombremse nicht ganz dämpfungsfrei: Das Rad wird durch die Reibung der Achse gebremst. Es wird also ein Amplitudenabfall zu beobachten sein.

2. Drehpendel, freie gedämpfte Schwingungen

Die Reibung erzeugt ein zusätzliches Moment $M_R = -2\beta\frac{d\varphi}{dt}$.

Gedämpfte Schwingung. Die Bewegungsgleichung für harmonische Drehschwingungen mit Dämpfung (Dämpfungskraft proportional zu $\frac{d\varphi}{dt}$) lautet:

$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\varphi(t) + 2\beta\frac{d\varphi(t)}{dt} = 0.$

Mit dem Ansatz $\varphi(t) = ce^{-\lambda t}$ erhält man $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Definiere zudem $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Unterscheide nach Stärke der Dämpfung

Schwingfall. $\omega_0 > \beta$ unterdämpft, ω reell. Gedämpfte periodische Bewegung.

Kriechfall. $\omega_0 < \beta$ überdämpft. Konvergiert schnell.

Aperiodischer Grenzfall. $\omega_0 = \beta$ Das System kehrt nach einem Ausschlag in seine Ruhelage zurück.

Berechnung des Dämpfungsverhältnisses. Das Dämpfungsverhältnis k beschreibt das Verhältnis von zwei aufeinander folgenden Ausschlägen der Schwingung:

$k = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+t)} = e^{\beta t}$.

Für die Berechnung des Dämpfungsverhältnisses stehen zwei Formeln zur Auswahl:

$k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i}$ oder $k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$

Die erste Formel verkleinert den statistischen Fehler, das sie einen Mittelwert aus einer Reihe von Messwerten bildet, für größere Werte von n gestaltet sich die Berechnung mit der zweiten Formel allerdings als weniger aufwendig.

Güte des Systems. Man charakterisiert die Dämpfung eines schwingungsfähigen Systems im Resonanzbereich oft durch die Güte Q. Wenn ΔE_{tot} der Energieverlust pro Periode ist, gilt für $\beta T \ll 1$:

$Q = -2\pi \frac{E_{tot}}{\Delta E_{tot}} = 2\pi \frac{\varphi(t)^2}{\varphi(t)^2 - \varphi(t+T)^2} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\beta t}} =\approx \frac{\omega_0}{2\beta}$

Die Güte bestimmt die Breite der Resonazkurve: Je größer die Güte, desto schärfer und höher ist die Resonanz.

3. Statische Messung der Winkelrichtgrösse D^*

Bringt man einen Gegenstand an das Pendel an und misst die Auslenkung in der Gleichgewichtslage, so kann man daraus die Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder des Drehpendels bestimmen: Das Rad wird durch die Kraft F um den Winkel φ ausgelenkt. Greift die Kraft tangential am Rand an, so gilt:

$|\vec{r} \times \vec{F}| = D^*\varphi$, also: $D^* = \frac{rF}{\varphi}$

Aus D^* lässt sich das Trägheitsmoment Ω berechnen: $\Omega = \frac{D^*}{\omega_0}$, mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und mit der Abschätzung aus Aufgabe 1 vergleichen.[2]

4. Drehpendel, erzwungene Schwingungen

Erzwungender, gedämpfter Fall. Dem schwingfähigen System sei nun ein periodisches äußeres Drehoment $M = M_0 \sin(\omega t)$ aufgeprägt. Die Bewegungsgleichung für erzwungene, gedämpfte harmonische Drehschwingungen lautet:

$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\varphi(t) + 2\beta\frac{d\varphi(t)}{dt} - \alpha\sin(\omega t) = 0$ mit $\alpha = \frac{M_0}{\Omega}$.

Als eine Lösung findet man $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi)$ mit der Amplitude $\varphi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$ und der Phase $\tan\psi = \frac{-2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2}$.

[2] $T = T(0)$ Periodendauer bei ungedämpfter Schwingung

Die erzwungene Schwingung hat die gleiche Frequenz wie das äußere Drehmoment und eine zeitlich konstante Amplitude. Äußeres Drehmoment und Auslenkwinkel sind jedoch um $\psi \leq 0$ gegeneinander phasenverschoben. Dabei hinkt der Auslenkungswinkel $\varphi(t)$ dem erregenden Drehmoment $M(t)$ hinterher.

Einige Spezialfälle.

- $\omega \ll \omega_0$ $\psi \approx 0$ in Phase
- $\omega = \omega_0$ $\psi = -\frac{\pi}{2}$ Resonanz
- $\omega \to \infty$ $\psi \to -\pi$ entgegengesetzt zu $M(t)$

Die maximale Amplitude taucht nicht exakt bei $\omega = \omega_0$ auf, sondern bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Die Resonanz verschiebt sich also in Folge der Dämpfung zu kleineren ω-Werten.

Gütebestimmung. An den $\frac{1}{\sqrt{2}}$-Amplituden-Punkten fällt die Amplitude der angeregten Schwingung auf $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{res}$ ab (A_{res} Amplitude der Resonanzfrequenz). Diese treten auf bei $\omega_{1,2} \approx \sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}\omega_0}$ (Näherung für große Werte von Q).

Die Differenz dieser Frequenzen bezeichnet man als Bandbreite

$b = (\sqrt{1+\frac{1}{Q}} - \sqrt{1-\frac{1}{Q}})\omega_0$. Mit $Q \gg 1$ ergibt sich $b \approx \frac{\omega_0}{Q} = 2\beta$

5. Serienschwingkreis, erzwungene Schwingungen

Beim elektromagnetischen Schwingkreis wirken die ohmschen Widerstände R von Spule und Leitungen als Energieverlustquellen. Es entsteht eine gedämpfte Schwingung, deren Gleichung aus den Kirchhoffschen Regeln hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_L(T) + U_R(T) + U_C(t) \\ U(t) &= L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{\int I(t)dt}{C} \\ \frac{1}{L}\frac{dU}{dt} &= \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL}I \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man:

$I(t) = I_0 e^{-\frac{r}{2L}t}\cos(\omega t + \alpha)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$ und $\alpha = \arctan(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$.

$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega l - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z}$, mit der Impedanz Z (elektrischer Scheinwiderstand).

Mit der Breite b der Resonanzkurve zwischen den $\frac{1}{\sqrt{2}}$-Amplituden-Punkten, bestimmt sich der Gütefaktor für große Q zu $Q = \frac{\omega_0}{b}$. Der Gütefaktor lässt sich auch über die Resonanzüberhöhung bestimmen: $Q = \frac{|U_L(\omega_0)|}{U_0} = \frac{|U_C(\omega_0)|}{U_0}$.