

# VORBEREITUNG: $\gamma$ -SPEKTROSKOPIE UND STATISTIK

TOBIAS FREY, FREYA GNAM

## 0. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

**0.1.  $\gamma$ -Strahlung.**  $\gamma$ -Strahlen bestehen aus energiereichen Lichtquanten ( $\gamma$ -Quanten) und bilden eine kurzwellige elektromagnetische Wellenstrahlung ( $\lambda < 0,5\text{nm}$ ).  $\gamma$ -Strahlung ist oft eine Begleiterscheinung der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Umwandlung der Atomkerne. Wird ein Atomkern von einem angeregten Zustand in einen niedrigeren Zustand zurückgeführt, so entsteht als Folge dieser radioaktiven Kernumwandlung  $\gamma$ -Strahlung. Die  $\gamma$ -Quanten sind elektrisch neutral. Somit lässt sich die  $\gamma$ -Strahlung nicht durch elektrische und magnetische Felder ablenken.  $\gamma$ -Strahlung hat ein großes Durchdringungsvermögen. Sie kann erst durch mehrere Zentimeter dicke Bleiplatten merklich geschwächt werden.

**0.2. Wechselwirkung von  $\gamma$ -Quanten mit Materie.** Es gibt drei fundamentale Formen der Wechselwirkung von  $\gamma$ -Strahlung mit Materie. Diese sind:

*Photoeffekt.* Bestrahlt man eine Metallplatte mit Licht genügend hoher Frequenz, so werden Elektronen abgelöst. Die Freisetzung eines Elektrons erfolgt durch den Stoß eines Photons (im Experiment:  $\gamma$ -Quant). Das Photon wird dabei vollständig absorbiert. Seine Energie geht bei der Wechselwirkung über in die Austrittsarbeit  $W_A$ , die zur Ionisation des Atoms benötigt wird, und in die maximale kinetische Energie des abgelösten Elektrons:

$$h\nu = W_A + \frac{1}{2}m_e v^2$$

Der Photoeffekt kann nur stattfinden, wenn die Energie des Photons größer als die Bindungsenergie des Elektrons ist.

*Compton-Streuung.* Beim Compton-Effekt handelt es sich um eine Wechselwirkung zwischen einem Photon und einem freien Elektron. Verhältnismäßig lose gebundene Elektronen, die hier als frei zu betrachten sind, findet man in Steinkörpern von kleiner relativer Atommasse. Die Wechselwirkung zwischen Photon und Elektron kann formal als Stoß betrachtet werden, für den Energie und Impulserhaltungssatz gelten.

Aus der Impulserhaltung in y-Richtung:

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - mv \cdot \sin \phi$$

In x-Richtung:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta - mv \cdot \cos \phi$$

Aus der Energieerhaltung:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2$$

Weiterhin gilt unabhängig vom Streumaterial für die Änderung der Wellenlänge des Photons:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_{e_0} c^2} (1 - \cos \theta)$$

Aus dieser Beziehung kann man leicht erkennen, dass die Energieübertragung bei einem Streuwinkel von  $\theta = 180^\circ$  maximal wird (Comptonkante).

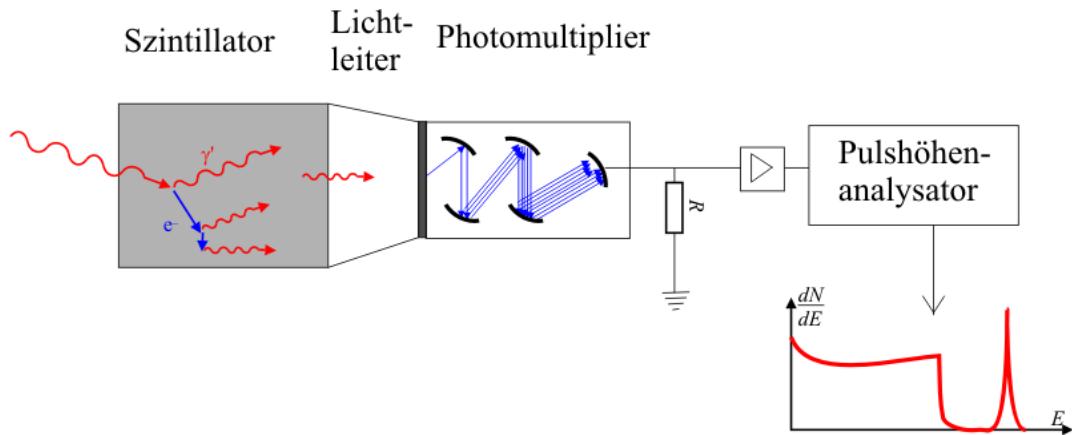
*Paarbildung.* Das Positron ist das Antiteilchen des Elektrons. Durch Quanten der Höhenstrahlung werden sogenannte Elektronenzwillinge (Elektron-Positron) erzeugt. Ein Elektronenzwilling, tritt dann auf, wenn ein  $\gamma$ -Quant, dessen Energie größer als 1,022 MeV ist, auf einen Atomkern trifft.

**0.3.  $\gamma$ -Spektroskopie.** Bei der  $\gamma$ -Spektroskopie wird die Energie der ausgesandten  $\gamma$ -Strahlung eines Isotops und die Intensität der Strahlung (Anzahl Zerfallsereignisse) analysiert. Während ein Geigerzähler nur die Anzahl der atomaren Zerfallsereignisse messen kann, ist ein Szintillationszähler (das Herzstück des Messgeräts) darüber hinaus in der Lage, auch die Energie der Zerfallsereignisse zu messen. Jedem einzelnen Zerfallsereignis wird die entsprechende Energie zugeordnet. Ein so entstandenes Diagramm mit der Energie auf der x-Achse und der Anzahl der Zerfallsereignisse auf der y-Achse nennt man Spektrogramm. Es bildet sich eine Linie, die für genau dieses Isotop oder genau diese Nuklidmischung typisch ist.

Bei der Spektroskopie muss der gesamte Messapparat geeicht werden. Dies geschieht mit einem Eichpräparat. Dieses hat eine ausgeprägte Linie, deren Energie bekannt ist. Das Spektrogramm des Cs137-Isotops hat z.B. eine auffällige Linie (Photopeak) bei ungefähr Kanal 230. Dann kann von dem Kanal auf die Energie rückgeschlossen werden. Bei jeder Veränderung der Hochspannung des Szintillationszählers muss neu geeicht werden, da sich das ganze Spektrogramm verschiebt und verzerrt. Zusätzlich muss die natürliche  $\gamma$ -Strahlung (Untergrundstrahlung) durch eine "Leermessung" berücksichtigt werden: Dies geschieht, in dem ohne Gegenwart irgendwelcher Isotope eine Messung gestartet wird. Die so gewonnenen Werte müssen von der ursprünglichen Messung abgezogen werden.

**0.4. Messung mit dem Szintillationszähler.** Unter einem Szintillator versteht man ein Material, welches beim Durchgang von geladenen Teilchen und  $\gamma$ -Quanten angeregt wird und die Anregungsenergie in Form von Licht wieder abgibt. Über die Messung der Lichtmenge (z.B. mit einem Photomultiplier) kann auf die deponierte Energie geschlossen werden. Der im Versuch verwendete Szintillator besteht aus einem Detektorkristall aus Natriumjodid, das mit Thalliumatomen dotiert ist. Bei Auftreffen von  $\gamma$ -Quanten auf den Kristall werden Elektronen freigesetzt. Diese freien Elektronen regen die Thalliumatome an, welche nach kurzer Zeit wieder in den Grundzustand zurückfallen und dabei Photonen aussenden.

Ein Szintillationszähler ist ein Messgerät zur Bestimmung der Strahlungsintensität von  $\gamma$ -Strahlung. Im Kopf des Messgerätes befindet sich ein nach den Seiten gegen Licht geschützter Szintillator, in dem beim Eintreffen eines  $\gamma$ -Quants ein Lichtblitz ausgelöst wird. Dieser sehr schwache Lichtblitz löst in einer dahinterliegenden Photokathode Elektronen aus (Photoeffekt). Diese Elektronen werden durch mehrere Dynoden im Photomultiplier verstärkt. An der Anode kann dann ein gut messbarer Stromimpuls abgenommen werden.



## 1. IMPULSHÖHENSPEKTREN

Bei diesem Versuch werden die Impulshöhenspektren verschiedener radioaktiver Präparate aufgenommen und analysiert. Mit CassyLab sind verschiedenste Messungen durchführbar. Für die Aufnahme von  $\gamma$ -Spektren gibt es die sogenannte VKA-Box, die direkt mit dem Ausgang des Szintillationszählers verbunden wird. Die analogen Nadelimpulse des Szintillationszählers, die die Information der Energie der einfallenden Strahlung nur in der Höhe der Impulse enthalten, werden durch einen A/D-Wandler in 256, 512 oder 1024 verschiedene digitale Kanäle aufgeteilt und dort (softwareseitig) gezählt. Die Anzahl der pro Kanal gezählten Ereignisse wird während der Messung direkt am Bildschirm als Tabelle angezeigt. Zusätzlich „wächst“ während der Messung ein Graph, der die Zuordnung Kanäle (Energie) - Anzahl Ereignisse zeigt. Die Software erlaubt eine flexible Einstellung einiger Messparameter, worunter die Messzeit wohl

der wichtigste ist. Man kann so im Vorhinein einstellen, wie lang die Messung dauern soll. Nach der eingestellten Zeit stoppt die Software die Zähler und die Messung ist beendet. Nun kann der Graph ausgedruckt, verändert oder sogar integriert werden

**1.1. Messung des Impulshöhenpektrums der  $\gamma$ -Strahlung von Cs-137 mit einem Einkanal-Impuls-Höhenanalysator (Fensterdiskriminator).** In diesem Versuch soll mit Hilfe des Cassy Interfaces im Einkanalbetrieb ein Impulshöhenpektrum von Cs-137 aufgenommen werden. Dabei wird der Abstand zwischen radioaktiver Quelle (Cs-137 - Präparat) und Szintillatorvorderfläche so gewählt, dass die Zählrate wenigstens  $\frac{100}{s}$  beträgt. Zuerst wird mit dem Oszilloskop die Verstärkung des Photomultipliers eingestellt, in dem dessen Betriebsspannung so gewählt wird, dass die Meßspannung möglichst gut im "dynamischen Bereichs" (0-5V) des Impulshöhenanalysators liegt. Nun wird der Impulshöhenanalysator angeschlossen und das Spektrum aufgezeichnet (in 0,1V Schritten bei je 10s Zählzeit).

**1.2. Messung des Impulshöhenpektrums der  $\gamma$ -Strahlung und der Untergrundspektren verschiedener Materialien mit 512-Kanal-Impulshöhenanalysator.** Der Messbereich ist in diesem Versuch in 512 gleiche Teile unterteilt, die durch den 512-Kanal-Impulshöhenanalysator gleichzeitig gemessen werden können. Zunächst wird der Verstärkungsfaktor des Photomultipliers wieder angepasst, so dass für Co-60 der dynamische Bereich des Detektors optimal genutzt wird. Jetzt kann das Spektrum für Co-60 aufgezeichnet werden, wobei darauf zu achten ist, dass die Zählrate im Bereich zwischen  $\frac{500}{s}$  und  $\frac{1500}{s}$  bleibt. Analog soll für die anderen Isotope verfahren werden, wobei der Verstärkungsfaktors des Photomultipliers konstant gehalten wird. Alle Spektren müssen zum Abschluss bezüglich der Untergrundstrahlung korrigiert werden. Dazu wird ein Spektrum ohne Strahlungsquelle aufgenommen und entsprechend von den Spektren der Isotope subtrahiert.

**1.3. Deutung der erhaltenen Impulshöhenpektrien.** Mit Hilfe des Computers sollen die Impulshöhenpektrien nun analysiert und gedeutet werden. Der Computer korrigiert dabei die Spektren in Hinsicht auf die Untergrundstrahlung, glättet die Kurven und fügt Fehlerbalken zu den Messpunkten hinzu. Danach werden beide Spektren anhand der Photopeakenergie des Cs-137 (etwa 662keV) geeicht und weitere charakteristische Stellen markiert und angezeigt.

- **Compton-Kante:** Für die Energie der Compton-Kante gilt:

$$E_C = \frac{h\nu}{1 + \frac{m_0c^2}{2h\nu}} = \frac{h\nu}{1 + \frac{m_0c^2}{2E_\gamma}}$$

- **Photopeak:** Entspricht der Gesamtenergie des Quants,  $E_\gamma = h\nu$ .
- **Rückstreu-Peak:** Entsteht durch Quanten, die von außen in den Kristall gelangen.  $E_R = E_\gamma - E_C$ .

Berechnete Werte für die Comptonkanten:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Cs-137} & E_{\gamma} = 662 \text{keV} & \implies E_C = 477 \text{keV} \\
 \text{Co-60} & E_{\gamma,1} = 1178 \text{keV} & \implies E_{C,1} = 968 \text{keV} \\
 & E_{\gamma,2} = 1333 \text{keV} & \implies E_{C,2} = 1118 \text{keV} \\
 \text{Na-22} & E_{\gamma} = 511 \text{keV} & \implies E_C = 340 \text{keV} \\
 & E_{\gamma} = 1275 \text{keV} & \implies E_C = 1062 \text{keV}
 \end{array}$$

Mit der Halbwertsbreite der Photolinie  $\Delta E$  und dem Auflösevermögen des Spektrums  $\frac{\Delta E}{E}$  lässt sich die Zahl  $N$  der tatsächlich auftreffenden Elektronen bestimmen:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \implies N = \left( \frac{E}{\Delta E} \right)^2$$

Die Linearität kann durch Überlagerung der Messkurven und Vergleich der Photopeaks nachgewiesen werden. Dazu wird die Energie für alle Photopeaks als Lage auf der Energieachse aufgetragen.

## 2. AKTIVITÄT DES Cs-137 PRÄPARATS

Die Aktivität  $A$  gibt die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit an.

$$A = \frac{N}{tq} = \frac{n}{q}$$

Die Zählrate  $n = \frac{N}{t}$  liefert das Programm.

Die Nachweiswahrscheinlichkeit  $q$  für den Szintillator ist der Quotient aus der Anzahl der im Kristall nachgewiesenen Quanten über der Anzahl der von der Quelle entfernten Quanten. Die Nachweiswahrscheinlichkeit  $q$  kann man einem Diagramm in der Vorbereitungshilfe entnehmen.

## 3. STATISTIK

**3.1. Statistische Verteilung von gemessenen Ereigniszahlen unter gleichen Bedingungen.** Mit Cassy werden im 256-Kanalbetrieb bei einer Messzeit von einer Sekunde mindestens 150 Spektren zur statistischen Auswertung aufgezeichnet.

Bei der Auswertung erhält man Häufigkeitsverteilungen von Zählraten. Dabei kann man zwei verschiedene Methoden verwenden:

- Integration über die Zählraten aus einem Teil des Spektrums mit etwa drei Zerfällen pro Zeiteinheit.
- Summation über die Gesamtzählrate der einzelnen Spektren mit etwa 25 Zerfällen pro Zeiteinheit.

Als Ergebnis ist eine Poissonverteilung zu erwarten.

**3.2. Statistische Auswertung (Mittelwert und Standardabweichung).** Für die beiden Stichproben aus Aufgabe 3.1 werden der Mittelwert  $x_m$ , die Standardabweichung  $s$  der Einzelmesswerte und die Standardabweichung  $s_{x_m}$  des Mittelwertes bestimmt.

*Mittelwert.*

$$x_m = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

*Standardabweichung.*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}$$

*Standardabweichung des Mittelwerts.*

$$s_{x_m} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}$$

*Bedingung für Poissonverteilung.* Weiterhin soll überprüft werden, ob eine Poissonverteilung vorliegt, also ob die Standardabweichung der Einzelmeßwerte gleich der Wurzel über dem Mittelwert  $s$  ist.

$$s = \sqrt{x_m} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

**3.3. Graphische Darstellung als Häufigkeitsverteilung.** Die Stichproben werden als Häufigkeitsverteilung graphisch dargestellt. Mithilfe der in 3.2 berechneten Werte werden die zugehörige Normalverteilung sowie Poissonverteilung in dasselbe Diagramm eingetragen.

Bei großen Mittelwerten  $\bar{x} = x_m$  kann die Poisson-Verteilung gut durch die Gaußverteilung genähert werden.

*Gaußverteilung (Normalverteilung).*

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-x_m}{s} \right)^2}$$

*Poissonverteilung.*

$$P(x) = \frac{x_m^x}{x!} \cdot e^{-x_m}$$

3.4. **Chi-Quadrat-Test.** Mit dem  $\chi^2$ -Test sollen folgende Hypothesen geprüft werden:

- (1) Die Integration über die Zählraten aus stammt aus einer Normalverteilung
- (2) Die Integration über die Zählraten aus stammt aus einer Poisson-Verteilung

Um zu testen ob die Häufigkeitsverteilung einer bestimmten Verteilung entspricht, verwendet man den  $\chi^2$ -Test:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(X - E)^2}{E}$$

Dabei ist  $X$  die gemessene Häufigkeit und  $E$  die nach der entsprechenden Verteilung erwartete Häufigkeit. Nun wird der errechnete Wert für  $\chi^2$  mit einem für die Signifikanzzahl und die Anzahl der Freiheitsgrade ( $\sim$  Stichprobenumfang) charakteristischen Wert aus einer Tabelle verglichen. Ist der berechnete Wert größer oder gleich dem tabellierten, so muss die Hypothese verworfen werden.