VORBEREITUNG: KREISEL

TOBIAS FREY, FREYA GNAM

PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

Wichtige physikalische Größen im Zusammenhang mit rotierenden Körpern:

Winkelgeschwindigkeit : $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} = \frac{d}{dt}\phi$
Drehimpuls : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \Theta \cdot \vec{\omega}$
Drehmoment : $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \Theta \cdot \dot{\vec{\omega}} = \frac{d}{dt}\vec{L}$
Trägheitsmoment: $\Theta = \sum\limits_i m_i r_i^2 = \int r_i^2 dm$

Nutation. Wandert die Figurenachse um eine raumfeste Drehimpulsachse, so bezeichnet man diese Bewegung als Nutation. Die von der Figurenachse umfahrene Fläche heißt Nutationskegel. Für die Nutation charakteristisch ist, daß die Richtungen von Figurenachse, Drehimpulses und damit auch momentaner Winkelgeschwindigkeit nicht zusammenfallen.

Präzession. Unter dem Einfluss einer äußeren Kraft führt die Figurenachse eines Kreisels eine Drehbewegung um eine raumfeste Achse in Kraftrichtung aus. Diese Bewegung bezeichnet man als Präzession. Der raumfeste Kegel, den die Figurenachse dabei beschreibt, heißt Präzessionskegel.

1. DREHIMPULSERHALTUNG

1.1. **Drehschemel.** Eine Versuchsperson setzt sich auf den Drehschemel und hält zwei Gewichte mit ausgestreckten Armen von sich weg. Dann wird der Drehschemel in Rotation versetzen. Zieht die Versuchsperson die Gewichte an den Körper heran, so vergrößert sich die Winkelgeschwindigkeit. Durch die Verlagerung der Masse nach innen nimmt das Trägheitsmoment ab. Die Winkelgeschwindigkeit muss also zunehmen, damit der Gesamtdrehimpuls erhalten bleibt.

1.2. **Fahrradkreisel.** Eine auf dem Drehschemel sitzende Versuchsperson hält den rotierenden Fahrradkreisel senkrecht vor sich, so dass die Achse parallel zum Boden ist. Dreht sie den Kreisel in eine waagrechte Position, so ändert sich der Drehimpuls in der Schemelachse und der Schemel beginnt sich entgegengesetzt zum Kreisel zu drehen.

2. Freie Achsen

Hängt man einen quaderförmigen Körper ("Zigarrenkiste") an Ösen, so erfolgt bei einer Drehung um die Hauptachsen mit dem kleinsten und dem größten Trägheitsmoment eine stabile Rotation. Man bezeichnet diese Achsen als freie Achsen. Rotiert der Körper um die Achsen des kleinsten Trägheitsmoments, so kann er durch eine Störung dazu gebracht werden, um die Achse des größten Trägheitsmoment zu rotieren. Die Störung muss verhältnismäßig groß sein. Eine Drehbewegung um die mittlere Hauptachse (Achse mit mittlerem Trägheitsmoment) ist hingegen instabil. Bereits durch eine kleine Störung geht die Rotation in ihren stabilsten Zustand über: Eine Rotation um die Hauptachse mit dem größten Trägheitsmoment.

3. Kräftefreier Kreisel

Der kräftefreie Kreisel dreht sich, ohne, dass die Figurenachse sich bewegt. Durch leichtes Anschlagen des inneren Kardanrahmens wird der Kreisel in Nutationsbewegung gebracht. Die Nutation des Kreisels soll in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz gemessen werden. Hierzu beschleunigen wir den Kreisel auf etwa $35\,\mathrm{Hz}$. Die Nutations- und Rotationsfrequenz werden mithilfe eines Phototransistors gemessen. Zur Messung der Rotationsfrequenz gibt es ein Reflexionsband, das bei jeder Umdrehung des Kreisels das Licht einer Lampe auf die Photodiode wirft. Damit wir die Nutationsfrequenz messen können, wird die Amplitude der Nutation so gewählt, dass der Strahl der Lampe während einer Nutationsperiode einmal unterbrochen wird. Die Messung wird mit am äußeren Kardanrahmen befestigten Gewichten wiederholt.

3.1. **Symmetrischer Kreisel.** Ein symmetrischer Kreisel hat zwei Hauptachsen mit dem gleichen Trägheitsmoment. Ist das dritte Hauptträgheitsmoment kleiner, so handelt es sich um einen prolaten oder verlängerten Kreisel, ist es kleiner, so nennt man den Kreisel oblat oder abgeplattet. Um einen prolaten Kreisel zu erhalten, bringen wir Zusatzgewichte auf der Figurenachse an. Mit Zusatzgewichten auf der Kreiselscheibe erhält man einen oblaten Kreisel.

Hat der Kreisel sogar drei gleiche Hauptträgheitsmomente, so ist er kugelsymmetrisch.

Die Nutationsfrequenz ist proportional zur Rotationsfrequenz:

$$\omega_N = \frac{\Omega_3}{\Omega_1}\omega$$

mit $\Omega_1 = \Omega_2$.

Wurden Zusatzgewichte am äußeren Kardanrahmen des Kreisels angebracht, so müssen diese zum entsprechenden Trägheitsmoment addiert werden: $\Omega_1 = \Omega_1^{Rotor} + \Omega_1^{Aussen}$. Dann ergibt sich:

$$\omega_N = \frac{\Omega_3}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} \omega$$

3.2. **Unsymmetrischer Kreisel.** Wenn die Drehachse bei der Nutation nahe bei den stabilen Hauptachsen liegt, bewegt sich die Figurenachse zwischen zwei Kreisen. Liegt sie in der Nähe der instabilen Achse, so überschlägt sich der Kreisel.

4. Dämpfung des Kreisels

Es soll nun die Dämpfung des Kreisels untersucht werden. Wir messen die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Laufzeit des Kreisels. Dazu wird der Kreisel zunächst auf etwa $35\,\mathrm{Hz}$ beschleunigt.

Luft- und Lagerreibung führen zu einer Dämpfung des Kreisels. Die Luftreibung ist geschwindigkeitsabhängig. Daher ist ein exponentieller Abfall der Frequenz mit der Zeit zu erwarten.

5. Kreisel unter Einfluss äusserer Drehmomente

An den symmetrischen Kreisel werden zwei Zusatzgewichte angebracht, so dass er eine Präzessionsbewegung durchführt. Wir messen die Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit von der Drehfrequenz des Kreisels. Die Präzessionsfrequenz wird mit einer Stopp-Uhr bestimmt, die Drehfrequenz mit einem Digitalzähler über die Anzahl der Impulse.

Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession beträgt:

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt} = \frac{D}{L} = \frac{rmg}{\Omega_3 \omega}$$

$r = d \sin \alpha$ ist der Abstand des Gewichtes vom Schwerpunkt, multipliziert mit dem Sinus des Winkel der Figurenachse zur Vertikalen. Ω_3 ist das Trägheitsmoment in Richtung der Figurenachse.

6. Hauptträgheitsmomente

Die Trägheitsmomente können aus den Ergebnissen der bisher durchgeführten Messungen mithilfe einer Ausgleichsgerade berechnet werden.

Um das Trägheitsmoment in Richtung der Figurenachse zu bestimmen, verwenden wir die Ergebnisse aus Aufgabe 5 und erhalten Ω_3 aus der Ausgleichsgeraden:

$$\frac{1}{\omega_P} = \frac{\Omega_3}{D} \omega$$

Dabei ist D das Drehmoment der Zusatzgewichte.

Die beiden anderen Drehmomente erhalten wir aus den Ergebnissen von Aufgabe 3:

$$\omega_N = \frac{\Omega_3}{\Omega_1}\omega$$

Die zusätzlichen Trägheitsmomente der Kardanrahmen müssen abgezogen werden:

$$\Omega_1^{Rotor} = \Omega_1 - \Omega_1^{Aussen} - \Omega_1^{Innen}$$
$$\Omega_2^{Rotor} = \Omega_2 - \Omega_2^{Innen}$$

Wurden zusätzliche Gewichtsscheiben auf dem Kreisel angebracht, so müssen diese mit dem Satz von Steiner berücksichtigt werden.

Die Masse des Rotors können wir aus der Formel für das Trägheitsmoment entlag der Figurenachse ermitteln:

$$\Omega_3 = \frac{1}{2}MR^2$$

7. Kreisel im beschleunigten Bezugssystem

Um einen Kreiselkompass zu erhalten, fesseln wir den inneren Kardanrahmen mittels der Arretiervorrichtungen an die Horizontalebene. Der Kreisel wird mithilfe eines Keils geneigt und auf einen Drehtisch gestellt. Nun wird der Kreisel mit der Hand angedreht und die Drehtischrotation eingeschaltet.

Die Drehtischrotation simuliert die Erdrotation und der Keil eine geographische Breite. Stünde der Kreisel ohne Unterlage auf dem Drehtisch, so würde er sich nicht drehen, da die Bewegung des Kreisels blockiert ist.

Abhängig von der Stellung der Figurenachse erfährt der Kreisel ein Drehmoment durch die Erdrotation:

$$\vec{M} = \vec{L} \times \omega_E$$

Nach einer bestimmten Zeit zeigt die Figurenachse des Kreisels in eine feste Richtung. Dies ist die "Nord"-Richtung unserer simulierten Erde.